

## Механика разрушения и проблемы освоения Арктики

Р. В. Гольдштейн<sup>1</sup>, член-корреспондент РАН,

Н. М. Осипенко<sup>2</sup>, кандидат технических наук

ФГБУН Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН

*Представлены примеры развития и применения методов и подходов механики разрушения материалов и конструкций для построения моделей ведущих процессов деформирования и разрушения ледяного покрова полярных регионов в естественных процессах и при взаимодействии с судами и сооружениями.*

**Ключевые слова:** трещина, напряжение, растяжение, сжатие, изгиб, разрушение, предельное состояние, структура, прочность, ледокол, канал, пролив.

### Введение

Развитие экономики Севера и необходимость обеспечения обороноспособности страны в Арктике поставили ряд научных проблем, среди которых важное место занимают вопросы взаимодействия ледяного покрова арктических морей с судами ледового плавания и инженерными сооружениями на шельфе. Особенно сложными оказываются условия навигации в зимнее время, а также обеспечение безопасности ледостойких платформ в таких условиях. В связи с этим центральными в механике ледяного покрова становятся исследования разрушения и деформирования ледяного покрова в естественных процессах и при его взаимодействии с судами и сооружениями. Подходы, развитые в механике разрушения материалов, позволяют более полно и рационально анализировать особенности процессов деформирования и разрушения льда и трансформацию структуры ледяного покрова, а также разрабатывать методы их расчета.

Ниже на иллюстративных примерах представлены некоторые узловые моменты применения механики разрушения к определению условий и форм разрушения морского льда и ледяного покрова. Показана возможность представления задач о деформировании и разрушении ледяного покрова в виде совокупности механических процессов, происходящих

в различных геометрических масштабах. Учет структуры морского льда позволяет построить сценарии его локального разрушения при различных видах напряженного состояния, в том числе в масштабе взаимодействия элементов конструкций и ледоколов с ледяным покровом. Анализ влияния напряженного состояния ледяного покрова в региональном масштабе на условия работы ледоколов выполняется в рамках представления канала как трещиноподобной конструкции в системе «ледокол — канал — ледяной покров». При этом происходит разбиение задачи о деформировании и разрушении ледяного покрова на внешнюю, относящуюся к деформированию ледяного покрова в большом масштабе, и внутреннюю, рассматривающую локальные аспекты разрушения. Связь этих задач обеспечивается одним параметром — коэффициентом интенсивности напряжений, характеризующим напряженное состояние в окрестностях вершины канала-щели во внешней задаче. С этих позиций, показывающих влияние напряженного состояния ледяного покрова на характер разрушения, проведена классификация форм разрушения.

Предложенный подход может быть полезен и при выборе оптимальных траекторий и режимов работы ледокола при проводке судов, и в операциях по снижению ледовых нагрузок на суда и сооружения. Аналогичный подход может быть применен также в актуальных задачах управления напряженным состоянием и движениями регионального

<sup>1</sup> e-mail: goldst@ipmnet.ru.

<sup>2</sup> e-mail: osipnm@mail.ru.

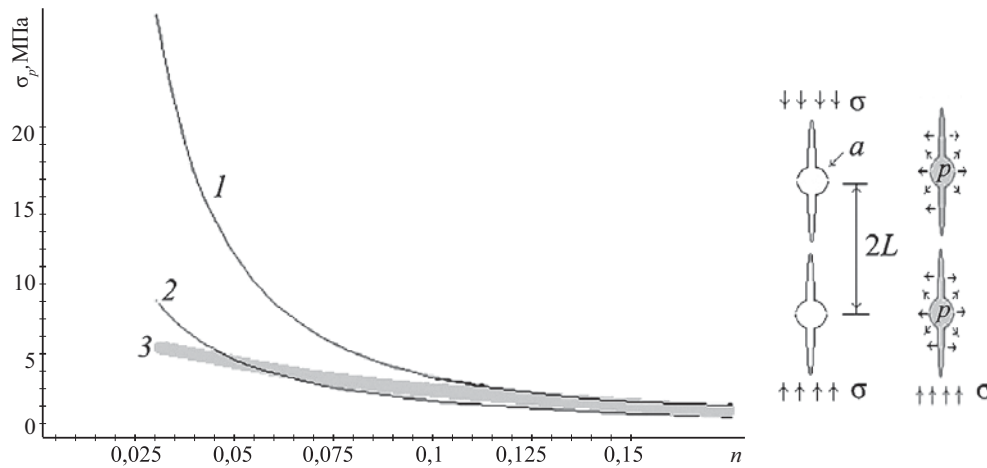


Рис. 1. Прочности при сжатии морского льда и его капиллярной пористости с учетом влияния заполнения капилляров (1 – без заполнения при  $K_{IC}^* = 5 \text{ кПа}\sqrt{\text{м}}$  и  $L \sim 2,5 \text{ мм}$ , 2 – то же с учетом заполнения капилляров, 3 – данные [9–10]). Справа схема развития трещин в окрестности свободных и заполненных пор

ледяного покрова под действием ветровых нагрузок и течений, в том числе в ограниченной акватории и при взаимодействии с платформами. Введена характеристика сопротивляемости ледяного покрова торошению — торосостойкость.

**Локальное разрушение, прочность**

Морской лед, образующийся в наиболее спокойном режиме, содержит вертикально ориентированные капиллярные поры, заполненные рассолом (тип В1 [1]). Характерные размеры капилляров (диаметр поперечного сечения 0,5—1 мм, длина 10—20 мм) меняются при изменении температуры льда. Система капилляров в однородно нагруженном упругом теле (плоская деформация) может служить отдельной структурой, элементы которой способны преобразовать приложенные к телу внешние напряжения и определить его предельное состояние при механических нагрузках — прочность при растяжении, сжатии и изгибе. Модель разрушения пористого тела была в основных чертах предложена авторами ранее [2—4]. Для большинства однородных и слабопористых материалов, для которых такое представление справедливо, характерно развитие на контуре пор трещин нормального разрыва вдоль оси нагружения [5]. Очаг разрушения образуется в области локальных растягивающих напряжений в окрестности контура отверстия в направлении вдоль сжатия, что соответствует распределению нормальных упругих напряжений на контуре отверстия. В результате при внешнем сжатии в этой области образуется устойчиво развивающаяся трещина нормального разрыва (рис. 1). Разрушение происходит при слиянии трещин, растущих от соседних пор [2—4]. В момент слияния размер трещин  $l$  близок к  $L$  — половине среднего расстояния между порами. При

таком условии в капиллярной структуре средняя пористость  $n$  может быть связана с соотношением размеров структуры:

$$R / L \sim n^{1/2}, \tag{1}$$

где  $R$  — характерный размер (радиус) поры.

Взаимосвязь между прочностью при одноосном сжатии и капиллярной пористостью имеет вид [2; 6; 7]

$$\sigma_1 = - \frac{K_{IC}^*}{\sqrt{\pi L}} \frac{1}{1,1n^{1,65} \sqrt{(1-n^{0,5})}}, \tag{2}$$

где  $\sigma_1$  — напряжение сжатия в продольном направлении (вдоль линии микротрещин);  $K_{IC}^*$  — трещиностойкость материала (льда) в масштабе микроразрушения (единичной поры).

Если отверстие заполнено жидкостью, вследствие изменения (уменьшения) его объема при сжатии на контуре отверстия возникает дополнительно равномерно распределенное давление. В случае упругого жидкого заполнения напряжения в окрестности поры значительно изменяются по сравнению с вариантом свободного отверстия, что должно сказываться на условиях инициирования разрушения в областях концентрации напряжений. Диапазон капиллярной пористости льда можно разбить на три участка. При относительно высокой пористости, при которой возможно вытекание рассола, на прочность влияет присутствие полых капилляров как концентраторов напряжений. В рассмотренном в [8] примере это условие выполняется, когда  $n > 0,12$ . При

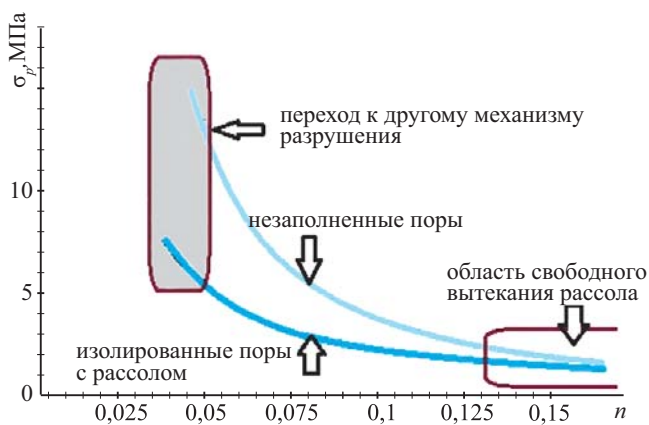


Рис. 2. Взаимосвязь прочности при сжатии пористого тела с пористостью

меньшей пористости кривая прочности пористой структуры отходит от эмпирической зависимости (рис. 1, кривая 1) в сторону увеличения прочности. Последнее объясняет рост прочности многолетних льдов с вытекшим рассолом. Предполагая в пограничной области пористости развитие процессов запираания капилляров, можно отнести снижение прочности льда с заполненными капиллярами в диапазоне пористости  $0,12 > n > 0,04$  на влияние заполнения, рассмотренное выше (см. рис. 1, кривая 2). При дальнейшем снижении пористости, которое происходит, например, при последовательном понижении температуры льда, первоначально содержащего заполненные ячейки с рассолом, могут проявиться эффекты, связанные с фазовым переходом и уменьшением вследствие этого размера пор. Сравнение с обработкой эмпирических данных измерения прочности морского льда по различным источникам [9—10] (см. рис. 1, полоса 3) показывает, что наблюдаемое изменение прочности морского льда в целом соответствует предложенной модели разрушения капиллярной структуры в диапазоне пористости  $n > 0,04$  при значении локальной трещиностойкости  $K_{IC}^* = 5 \text{ кПа}\sqrt{\text{м}}$ . Обобщенное представление о взаимосвязи прочности при сжатии пористого тела с пористостью в рамках предложенной модели показано на рис. 2.

**Эффективная прочность морского ледяного покрова.** Во многих задачах механики ледяного покрова определяющим параметром служит его эффективная прочность. Оценка этой характеристики наталкивается на ряд проблем, связанных с различием структуры, состава и свойств по толщине льда и вызванных режимом его генезиса, вариациями температуры и механической истории. Так, согласно классификации, предложенной Н. В. Черепановым [1; 11], морские льды представлены девятью разновидностями. Отметим также существование обширных наслоений молодых льдов, в которых тип структуры может периодически меняться по толщине.

Рассмотрим для примера оценку эффективной прочности морского ледяного покрова по отношению к горизонтальному сжатию с учетом изменения структуры и свойств льда по толщине. Распространено представление этого свойства как суммы удельных сопротивлений сжатию отдельных слоев [9]. Такой подход фактически предполагает, что нагружение каждого слоя проводится пропорционально его локальной прочности или, если оценка ориентирована на одинаковую горизонтальную деформацию по толщине льда, что прочность горизонтальных слоев пропорциональна модулю упругости. В реальных ситуациях это не так. Можно показать, что отношение локальной прочности к модулю упругости в характерном для морского льда диапазоне пористости

до  $n \approx 0—0,2$  меняется более чем в семь раз, причем прочность уменьшается быстрее. Поскольку (по крайней мере для льда типа В1) объем заполненной рассолом пористости возрастает по мере приближения к границе с водой [8], его локальная прочность в той же последовательности падает. Предельная деформация в момент исчерпания несущей способности для нижних слоев плавающего льда оказывается меньше, чем для верхних. Поэтому при равномерном деформировании по толщине льда разрушение начинается с нижних слоев, в то время как верхние сохраняют несущую способность. В этом случае прочность ледяного покрова в целом определяется сопротивлением этих оставшихся слоев. Такой сценарий разрушения дает основание для подхода к оценке эффективной прочности, который учитывает возможность исчерпания несущей способности отдельных слоев при деформировании до достижения общей потери несущей способности. Эффективная прочность может быть представлена в виде [8]

$$\bar{\sigma}_p = \frac{1}{h} \int_{z^*}^h \sigma(z) dz, \quad (3)$$

где  $\sigma(z)$  — напряжение в слое на глубине  $z$ ;  $z^*$  — граница слоя, исчерпавшего несущую способность.

На рис. 3 показан пример расчета по (3) сопротивления льда деформированию при сжатии ледяного покрова толщиной 0,3 м с учетом потери несущей способности нарушенных слоев  $\bar{\sigma}$ . Эффективная прочность ледяного покрова  $\bar{\sigma}_p$  соответствует максимальному сопротивлению при деформировании. При этом до исчерпания предельной прочности происходит потеря несущей способности в нижнем слое толщиной 3—7 см. Для сравнения там же приведена оценка эффективной прочности  $\bar{\sigma}_p^*$ , рассчитанная путем осреднения прочности слоев для такой же толщины льда.

Показательно, что простое осреднение по прочности слоев дает завышенный результат по сравнению с вариантом, учитывающим разрушение (в данном случае примерно в 1,4 раза).

В других вариантах деформирования ситуация может быть иной. При небольшом изгибе кромки льда вверх на фоне доминирующего сжатия максимальное среднее напряжение сближается с  $\bar{\sigma}_p^*$ , а толщина разрушенной области в момент достижения максимума нагрузки уменьшается. Деформирование изгибом в противоположном направлении ослабляет сопротивление разрушению и увеличивает долю разрушенной области. Этот эффект частично объясняет наблюдающееся различие между показателями прочности при изгибе, полученными на консольных балках, выпиленных из плавающей ледяной пластины, и при испытаниях дисков (кernов) на центральный изгиб. В первых критическое равновесие наступает после исчерпания несущей способности некоторого слоя льда на нижней кромке балки в области высокой пористости, так что реальное сопротивление изгибу создается только ее верхними слоями. Такие ситуации могут возникать при взаимодействии ледяного покрова с наклонными элементами конструкций и судов. Обратим внимание на возможность критических ситуаций при изменении нагрузки. В частности, если сжатое ледяное поле находится в метастабильном состоянии, при котором горизонтальные нагрузки достигают уровня инициирования локального разрушения в окрестности пор, но недостаточного для развития неустойчивого процесса разрушения, появление дополнительных сил иного направления может вызвать катастрофическое разрушение. Во льду с капиллярным строением порового пространства при горизонтальном сжатии ледяного покрова в метастабильном состоянии развиваются трещины вертикальной ориентации, что резко снижает

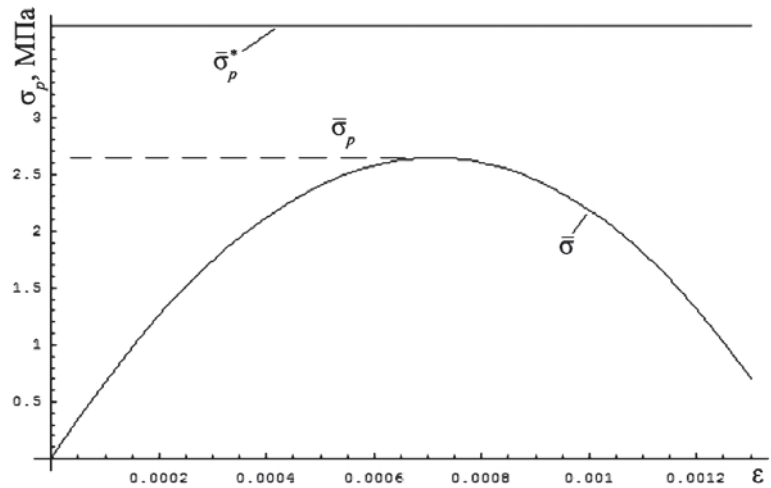


Рис. 3. Эффективная прочность при сжатии ледяного покрова толщиной 0,3 м с учетом потери несущей способности нарушенных слоев

сопротивление срезу, в результате чего, например, возможен пролом льда под грузом.

Таким образом, морской лед с капиллярно-пористой структурой представляет собой пример структурированной среды, прочность которой определяется сценариями разрушения с участием элементов структуры. На примере приведенной оценки эффективной прочности морского ледяного покрова при сжатии в горизонтальном направлении (поперек осей капилляров) показано, что присутствие рассола в замкнутых капиллярах существенно снижает прочность льда. Рассмотренные примеры демонстрируют разнообразие сценариев локального разрушения морского льда, что необходимо иметь в виду при анализе взаимодействия ледяного покрова с судами и сооружениями.

Участие структуры пресноводного льда, представленной зернистостью, в сценариях формирования прочностных свойств можно проиллюстрировать на примере развития трещин в окрестностях плоскостей скольжения, образующихся на границах зерен при сжатии. Роль таких трещин (wing cracks) аналогична роли капилляров в морских льдах. Их слияние приводит к развитию магистральных нарушений или их систем. Обсуждаются и другие варианты сценариев разрушения, в частности связанных с иницированием множественных трещин, оперяющих плоскости скольжения [12; 13]. Такой механизм в [14] предлагается и для объяснения механизма разрушения крупномасштабных элементов ледяного покрова.

### Трещиностойкость льда

Напомним, что в общем случае в масштабе трещины в целом напряженно-деформированное состояние среды в окрестностях ее вершины определяется тремя составляющими коэффициента интенсивности напряжений. Кроме  $K_I$ , характеризующего симметричный нормальный отрыв или сжатие, могут существовать величины  $K_{II}$  и  $K_{III}$  отвечающие поперечному (поперек фронта трещины) или продольному (вдоль фронта трещины) сдвигу соответственно [15]. Хрупкое разрушение материала в масштабе лабораторного образца обычно связывают с достижением коэффициентом интенсивности напряжений  $K_I$  в вершине трещин нормального разрыва предельного уровня  $K_{Ic}$ . Величину  $K_{Ic}$  можно назвать трещиностойкостью материала. Она определяет развитие трещин в естественных процессах разрушения льда и в технологических процессах, в частности при обламывании кромки ледяного

покрова ледоколом [16]. Эта характеристика для льда, как и для других материалов, демонстрирует масштабную изменчивость. Выше показано, что при развитии микроразрушения в окрестности капилляров уровень эффективной трещиностойкости  $K_{IC}^* = 5 \text{ кПа}\sqrt{\text{м}}$ . В экспериментах на лабораторных образцах натурального морского льда [16—18]  $K_{IC} \approx 40\text{—}100 \text{ кПа}\sqrt{\text{м}}$ . При изменении размера образца в диапазоне 0,1—10 м в натуральных экспериментах величина  $K_{IC}$  возрастает до 200—240 кПа $\sqrt{\text{м}}$  [18]. Заметим, однако, что причины наблюдаемого масштабного эффекта не до конца выяснены. Если для перехода от микроразрушения в масштабе зерна или капилляра к лабораторному образцу справедливы оценки, в основе которых лежит представление о росте влияния этих элементов структуры на процессы в концевой зоне трещины, как и в других структурированных средах, то дальнейшее увеличение нуждается в уточнении. При оценке эффективной способности работы ледокола в крупнобитых льдах (характерный размер льдин в плане до 400 м), в которых ледокол раскалывает отдельные льдины, создавая в них магистральный разрыв, наибольшее согласие с эмпирическими данными по сопротивлению льда достигается при его эффективной трещиностойкости  $K_{IC}^* = 100 \text{ мПа}\sqrt{\text{м}}$  [19].

**Несущая способность, индентирование.** В различных практических ситуациях ледяной покров арктических морей и рек представляет собой тонкое трансформируемое покрытие больших и малых площадей, способное воспринимать механические нагрузки. На этой основе базируются технологии создания ледовых сооружений (островов) на шельфе, ледовых причалов и переправ. Несущая способность льда определяет их функциональные качества. К настоящему времени накоплен большой практический опыт эксплуатации таких объектов, разработаны методы расчета и моделирования процессов статического и динамического деформирования и разрушения ледяного покрова под влиянием стационарной и подвижной нагрузок.

Наблюдения в натуральных условиях показывают, что при достижении в плавающей ледяной пластине критических напряжений под локализованной поперечной нагрузкой возникает система радиальных трещин. Наличие сквозных трещин снижает грузоподъемность льда, особенно при длительном нагружении. Однако если сеть сквозных трещин сравнительно редкая, то величина усилия, проламывающего лед, практически не меняется. Поверхностные трещины мало влияют на грузоподъемность ледяного покрова. Экспериментально показано, что даже искусственные прорезы во льду не меняют существенно его несущую способность. Отсюда неудачные попытки добиться увеличения проходимости судов во льдах путем искусственного надрезания льда по ходу судна.

Разрушение в виде радиальных трещин первоначально возникает на нижней поверхности льдины

непосредственно под грузом, где наблюдаются наибольшие растягивающие напряжения. Зародившись в очаге максимальных напряжений, трещина развивается в радиальном направлении, поскольку в пределах чаши прогиба окружные напряжения больше, чем радиальные. Обычно фиксируется 4—6 радиальных трещин. После образования трещин тангенциальные моменты резко уменьшаются, во всяком случае, в пределах образовавшихся клинообразных участков. При этом полностью меняется напряженное состояние в пластине и даже знак ее кривизны в области приложения нагрузки. Анализ скорости высвобождения упругой энергии (или трещиноподвижной силы) для радиальных трещин показал, что она обращается в нуль, когда радиальные трещины примерно в два раза больше характерного размера плавающего ледникового покрова  $r_s$  [20]. Это ограничивает размер трещин. Данные этого анализа согласуются с наблюдаемыми во время полномасштабных и маломасштабных экспериментов. Заметим, что величина  $r_s$  для пресноводного и морского льда различна. В эмпирической формуле для оценки этого параметра  $r_s = kh^{3/4}$  коэффициент  $k$ , зависящий от модуля упругости льда, для пресноводного льда равен 16, а для морского — 13,5 [21]. Большая податливость морского ледяного покрова обеспечивает большие локальные прогибы под нагрузкой по сравнению с пресноводным льдом, а также меньшие размеры чаши прогиба. Последнее приводит к различию расстояния от контура нагрузки до первых кольцевых трещин. По данным [22], для морского льда оно составляет 5—8 толщин льда, а для пресноводного — 13—27 толщин. Число радиальных трещин зависит от граничных условий. Так, в экспериментах с пластиной, примороженной по контуру к стенкам бассейна, наблюдалось значительно большее количество радиальных трещин [22]. Сценарий развития радиальных трещин зависит от условий деформирования. Если деформирование происходит контролируемым усилием, зарождение и неустойчивое (динамическое) распространение одной трещины изменяет геометрическую ситуацию. Она приближается к варианту нагружения на краю двух сомкнутых пластин. Поскольку максимальные напряжения под нагрузкой в этой ситуации больше, чем для ненарушенной пластины (несущая способность пластины, нагруженной сосредоточенной нагрузкой на краю, составляет 43% несущей способности бесконечной пластины до появления первой трещины), это сразу приводит к инициированию радиальных трещин в поперечном направлении. Таким образом, в этих условиях практически одновременно развиваются несколько трещин. Ситуация меняется, если деформирование происходит при контролируемом смещении точки приложения нагрузки. В этом случае значимой оказывается другая закономерность нагружения — при одинаковой удельной нагрузке смещения под ней в сомкнутых пластинах больше, чем в случае бесконечной пластины. Поэтому при



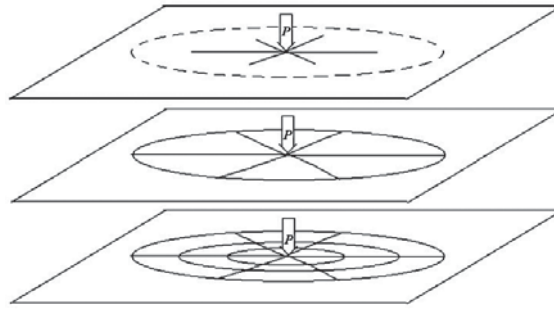


Рис. 4. Схема развития системы трещин при сосредоточенной поперечной нагрузке плавающего ледяного покрова

инициировании первой трещины в бесконечной пластине происходит сброс нагрузки при сохранении смещений. Для появления следующих трещин нужно продолжить деформирование до достижения необходимого уровня напряжений. Этим способом нагружения можно регулировать количество радиальных трещин.

Далее внешняя нагрузка уравнивается радиальными моментами, вызывающими растяжение верхней поверхности льда. Происходит частичное заклинивание образующихся секторов из-за стеснения взаимного разворота при росте прогибов. Когда растягивающие напряжения на периферии чаши прогиба достигают предельного значения, инициируются кольцевые трещины, охватывающие чашу прогиба, причем сначала развивается наиболее удаленная трещина. При этом суммарная нагрузка составляет 40—60% нагрузки пролома пластины [22; 23]. Затем процесс повторяется, приближаясь к области приложения нагрузки, образуются концентрические круговые трещины, по которым может произойти обламывание образовавшихся секторов. Появление системы трещин не сразу приводит к потере несущей способности, поскольку усилия распора между отдельными клиновидными блоками и соответствующие контактные напряжения препятствуют прорастанию трещин до полного разделения блоков и проскальзывания по поверхностям контакта. Эти усилия уравнивают внешнюю нагрузку и способствуют сохранению несущей способности ледяного покрова. Поэтому при решении задач о проломе ледяного покрова на заключительном этапе его следует рассматривать как своеобразную конструкцию, частично разделенную трещинами и составленную из блоков, взаимодействующих между собой и с окружающей их неразрушенной частью ледяного покрова, если такая имеется, выполняющей роль обоймы (рис. 4) [22].

Практический интерес к несущей способности льда связан с различными технологическими задачами, в которых наибольшее внимание уделяется разным фазам ее обеспечения. Так, при организации движения по льду важно повышать его грузоподъемность, избегая появления нарушений

и трещин. То же относится и к долговременному использованию льда для устройства стационарных сооружений и размещения оборудования. В то же время для решения задач оптимизации процесса разрушения льда при движении судов ледового плавания необходимо изучать заключительные этапы сценария разрушения льда, закономерности развития системы трещин и создаваемые при этом нагрузки на элементы корпуса судов и ледостойких конструкций.

Под проломом далее будем понимать такое состояние ледяного покрова, при котором отдельные блоки льда настолько разделены, что при действии поперечной нагрузки механического взаимодействия их берегов не происходит. Внешние силы при этом уравниваются лишь силами плавучести. Опыт показывает, что при локализованной нагрузке возникает система радиальных и кольцевых трещин.

При этом кроме процессов развития трещин в условиях стеснения деформаций необходимо анализировать механизмы контактного взаимодействия блоков льда, а также влияние на эти процессы внутренних напряжений, распределения температуры по толщине льда, присутствия воды и других факторов.

Существуют различные точки зрения на механизм формирования структуры разрушения льда под нагрузкой. При моделировании пролома хрупким механизмом разрушения льда при развитии трещин нормального разрыва [24—26] для описания сценария разрушения кроме характеристик прочности и деформационных свойств льда необходимо использовать параметр трещиностойкости льда  $K_{IC}$ . В случае доминирования процессов неупругого деформирования льда при стеснении деформаций полезным оказывается энергетический подход [22]. Разные модели механизма разрушения приводят к различным заключениям о наличии или отсутствии масштабного эффекта в рассматриваемом явлении. Этот вопрос требует дальнейших согласованных экспериментальных и теоретических исследований. Проблемы оптимизации процессов пролома и разрушения ледяного покрова важны для работы ледоколов и других технологических приложений. Поэтому

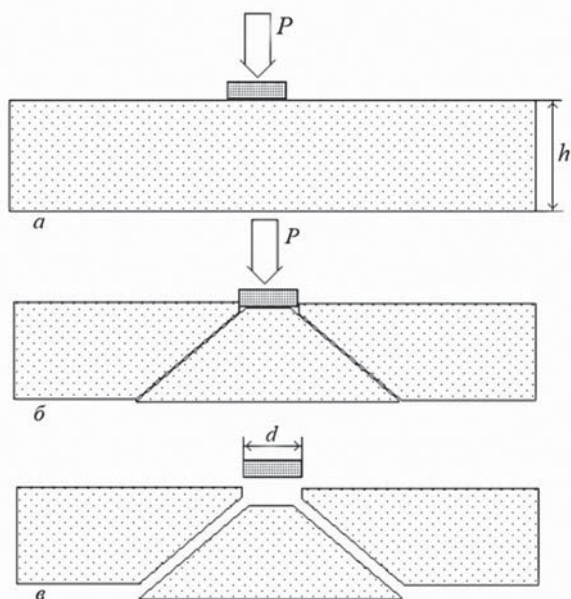


Рис. 5. Схема образования конической трещины при проломе ледяного покрова

необходимо изучение заключительной фазы развития системы трещин при проломе [27].

Значительный интерес представляет влияние масштаба на разрушение материалов при индентировании. Классический вариант пролома ледяного покрова с образованием чаши прогиба и последующим развитием системы радиальных и кольцевых трещин при уменьшении размеров области приложения нагрузки трансформируется. Он заменяется образованием локальной конической трещины по контуру области приложения нагрузки, как это происходит при пенетрации хрупких материалов (рис. 5). Полевые



Рис. 6. Картина разрушения льда (финальная стадия) при квазистатическом нагружении индентором диаметром 10 мм

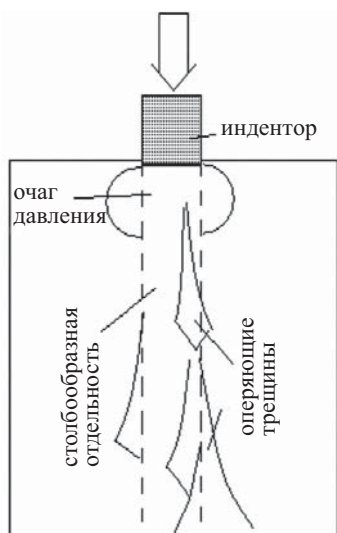


Рис. 7. Плоская кольцевая трещина при разгрузке образцов (нагрузка на индентор сверху вниз). Диаметр внутреннего отверстия в кольцевой трещине близок к диаметру индентора

наблюдения показывают, что коническая трещина выходит на нижнюю кромку ледяной пластины под углом  $36^\circ$  [28]. Исследования по механике льда [17; 29—32] показали, что разрушение льда при малом диаметре индентора включает в себя процессы, отличающиеся от типичных для обычных конструкционных материалов. Так, при разрушении натурального речного льда индентором с диаметром, сравнимым с размерами кристаллов льда, форма и механизм разрушения льда меняются с изменением диаметра индентора при одной и той же скорости его внедрения [33; 34]:

- Если диаметр индентора меньше 6 мм, доминирующая форма разрушения — выдавливание квазжидкой массы раздробленного материала, находящегося в состоянии, близком к фазовому переходу первого рода, из области высокого давления под индентором. Процесс имеет пульсирующий характер, что приводит к колебаниям нагрузки на индентор.
- Если диаметр индентора больше 10 мм, на первом этапе деформирования выделяется столбобразная цилиндрическая отдельность, повторяющая вдоль оси нагружения (С-оси кристаллов) на всю толщину образца. При дальнейшем деформировании в ее окрестности возникают опережающие его трещины нормального разрыва, траектории которых составляет малый угол (около  $10^\circ$ ) с образующей цилиндра (рис. 6). Развитие трещин становится доминирующим при дальнейшем увеличении размеров индентора. Форма разрушения становится конической (см. рис. 5).
- При разгрузке образцов наблюдается развитие симметричных плоских кольцевых трещин

нормального разрыва, ориентированных поперек оси нагружения (рис. 7).

**Трещиноподобные структуры в механике ледяного покрова**

Кроме механизмов разрушения ледяного покрова, связанных с распространением трещин в общепринятом представлении, в механике льда и ледяного покрова в силу специфики свойств и геометрии обнаруживаются сценарии разрушения, для описания которых удобно использовать аппарат механики разрушения, что, в свою очередь, расширяет ареал ее применения.

**Трещины сжатия, наслоения, торосы.** При доминировании сжатия в тонком ледяном покрове развиваются системы трещиноподобных структур сжатия — наслоений с перехлестом берегов или торосения (рис. 8), ориентированных по нормали к сжимающим нагрузкам [35]. Предельное равновесие таких элементов макроструктуры ледяного покрова определяется величиной критического коэффициента интенсивности напряжений в концевой области трещин сжатия  $K_h$  (условиями разрушения в концевой области). В зависимости от свойств льда и толщины ледяного покрова в ней могут реализоваться различные механизмы разрушения от локальной потери устойчивости, что характерно для тонких льдин (толщиной менее 30 см), до пластического локализованного сдвига или хрупкого разрушения при сжатии (рис. 9).

Очаги и полосы наслоений и торосов (трещин сжатия) во время своего развития сопровождаются вторичными разрывами в направлении сжатия (поперек траектории трещины сжатия), образуя сопряженную систему нарушений. Причиной появления вторичных разрывов служит изменение напряженного состояния в окрестности трещин сжатия. Трещины сжатия снижают напряжения сжатия в своей окрестности в поперечном направлении к оси, при

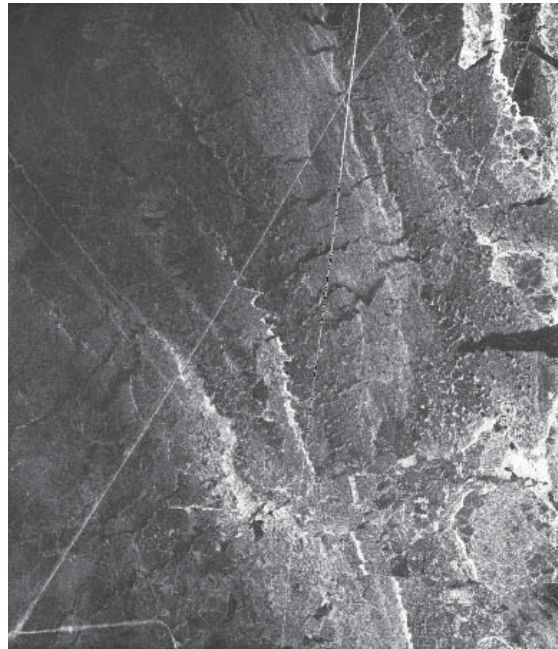
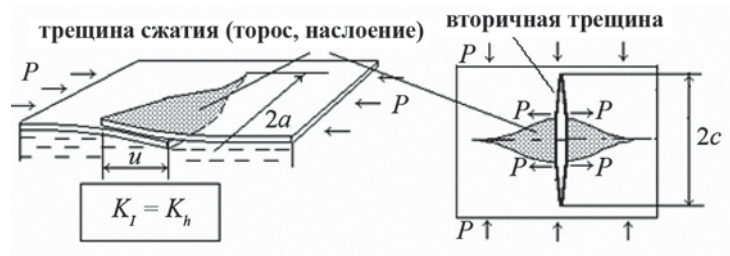


Рис. 8. Система наслоений (светлые контуры) и сопряженных с ними вторичных трещин (темные линии) в Ботническом заливе [32; 36]. Вверху — схема развития сопряженных трещин сжатия-разрыва

этом в продольном направлении возникает зона растяжения, вследствие чего в этой области появляются вторичные трещины нормального разрыва (см. рис. 8). Оценки на модельных материалах [35] показывают, что величина  $K_h$  на порядок больше трещиностойкости  $K_{IC}$  данного материала. Поэтому маловероятна обратная картина — появление вторичных трещин сжатия в окрестности магистральных разрывов. На основе обобщения имеющихся наблюдений механических явлений в ледяном покрове [37] предложен вариант классификации крупномасштабных структур разрушения ледяного покрова в естественных процессах (табл. 1).

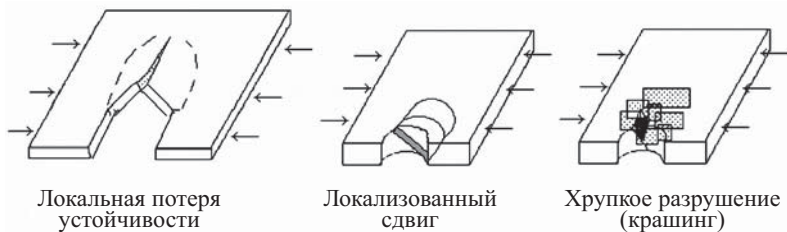
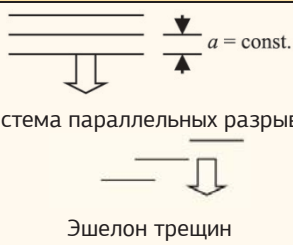

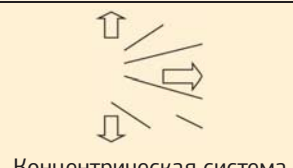
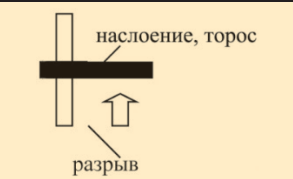
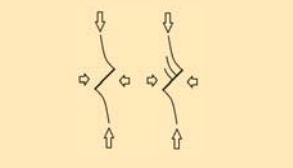
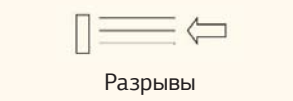
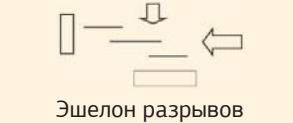



Рис. 9. Структура концевой области трещин сжатия в ледяном покрове



Таблица 1. Классификация структур разрушения ледяного покрова

Тип воздействия	Нагрузка	Вариант наблюдаемой структуры разрушения	Масштаб, км <sup>2</sup>	Граничные условия
<i>Стационарный ледяной покров</i>				
1. Однородное растяжение	Ветровая нагрузка, подледное течение	 <p>Система параллельных разрывов Эшелон трещин</p>	10 <sup>4</sup>  10 <sup>3</sup>	Свободные границы
2. Однородное растяжение	Ветровая нагрузка, подледное течение	 <p>Система дугообразных разрывов</p>	10 <sup>3</sup>	Ограничение смещений
3. Двухосное растяжение	Ветровая нагрузка (растекание области высокого давления)	 <p>Концентрическая система</p>	10 <sup>4</sup>	Свободные границы
4. Однородное сжатие	Ветровая нагрузка, подледное течение	 <p>наслоение, торос разрыв Сопряженные структуры сжатия-растяжения</p>	10 <sup>4</sup>	Свободные границы
5. Двухосное сжатие	Ветровая нагрузка, подледное течение, стеснение смещений	 <p>Разрывы, оперяющие локальные сдвиги (wing cracks)</p>	0—10 <sup>4</sup>	Ограничение смещений
<i>Дрейфующий лед</i>				
1. Однородное сжатие	Ветровая нагрузка	 <p>Разрывы</p>	10 <sup>4</sup>	Перемещение ограничено в направлении ветра
2. Двухосное сжатие	Ветровая нагрузка	 <p>Эшелон разрывов</p>	10 <sup>3</sup>	Перемещение ограничено в двух направлениях
<i>Влияние границ водоема</i>				
1. Сдвиговые нагрузки на дрейфующий лед со стороны берега	Нагрузки провоцируются навальным ветром	 <p>Сдвиговые нарушения</p>	10 <sup>3</sup>	Перемещение ограничено под углом к направлению ветра

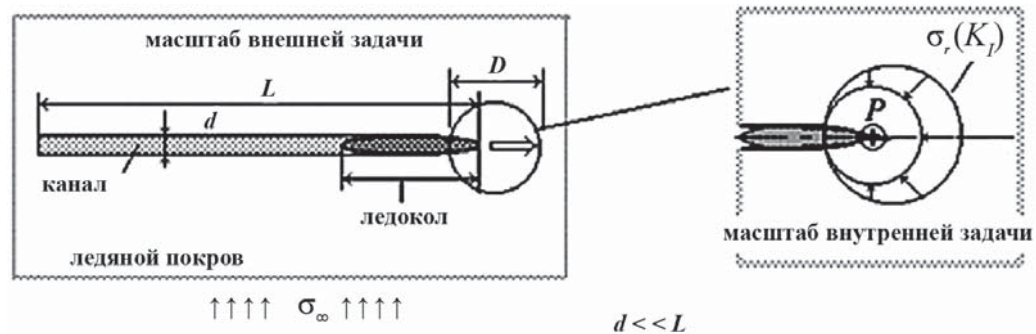


Рис. 10. Разделение масштабов задачи о разрушении льда ледоколом

**Ледокол и управление напряженным состоянием ледяного покрова.** Один из основных режимов работы ледоколов — проводка судов в акваториях, покрытых льдом [38]. Ледокол прокладывает канал, по которому движется караван судов, посредством механического разрушения и раздвижения масс плавающего льда, находящегося в различном состоянии сплоченности и нарушенности, при различных уровнях внешнего сжатия. После прохождения судов канал закрывается: обломки льдин в канале смерзаются, берега смыкаются под действием сжатия льдов.

С точки зрения механики деформируемых сред описанный процесс представляет собой взаимодействие испытывающей распределенные внешние воздействия пластины плавающего ледяного покрова, имеющей разрез, с ледоколом и судами каравана, создающими, в свою очередь, локальные нагрузки на берегах канала-разреза и на его вершину [17] (рис. 10). Для анализа используется модель упругого ледяного покрова на гидравлическом основании, так как время релаксации льда обычно больше времен единичных актов взаимодействия (разрушения) в рассматриваемой схеме. Задачи о напряженно-деформированном состоянии рассматриваются в квазистатической постановке. Эти ограничения не являются принципиальными для рассматриваемой модели.

Для дальнейшего важно сопоставить масштабы геометрических и силовых параметров задачи. Длина открытой части канала, в пределах которой отсутствует механическое взаимодействие между берегами, как правило, много больше (на два-три порядка) его характерной ширины. По данным, приведенным в [39], можно оценить характерную длину открытой части канала: при плавании в сплошном ледяном покрове и сжатии льдов в 1 балл (напряжение сжатия порядка 5 кПа) длина канала составляет 1,5—2,5 км, а при сжатии в 2 балла (20 кПа) она уменьшается до 500—700 м. В свою очередь, начальная ширина канала (порядка 20 м) значительно больше усредненной толщины ледяного покрова.

Поперечные размеры судов по порядку величины соизмеримы с шириной канала. Внешние нагрузки ледяного покрова (сжатие льдов, ветровые, термические и т. п. движения) распространяются на регионы с размерами в десятки и сотни километров [40], контактные нагрузки, передаваемые на кромке канала ледяному покрову при разрушении льда и движении судов, прикладываются на площадках размерами порядка 1—10 м<sup>2</sup> [38; 39].

Присутствие сильно различающихся масштабов геометрических и силовых факторов позволяет при анализе особенностей взаимодействия ледокола и ледяного покрова упростить задачу, применяя процедуру выделения и сращивания промежуточных асимптотик, как это сделано в механике трещин [15]. В таком случае канал с его окрестностями тождественен трещине (масштаб внешней задачи). Распределение напряжений, вызванное наличием канала, в малых масштабах окрестностей ледокола (внутренняя задача) можно учитывать по асимптотике решения вблизи вершины канала посредством коэффициента интенсивности напряжений. В результате внешняя задача о напряженно-деформированном состоянии может быть сформулирована как плоская задача теории упругости для разреза длиной  $2\ell$ , находящегося под действием однородных напряжений  $\sigma_{\infty}$ , приложенных на бесконечности, и системы нагрузок на берегах разреза. Последние считаются усредненными по масштабу приложения. Во внутренней задаче о движении ледокола изучаются особенности напряженного состояния и процессов разрушения ледяного покрова в окрестностях вершины канала с учетом того, что на них влияет поле напряжений вблизи вершины разреза во внешней задаче. При этом устанавливается равновесное состояние между характером разрушения льда во внутренней задаче и условиями, обеспечивающими его во внешней задаче. Таким образом, можно говорить о соответствии внешней и внутренней задач [15; 17].

В общем случае напряженно-деформированное состояние среды в малой окрестности вершины разреза трещины определяется тремя составляющими

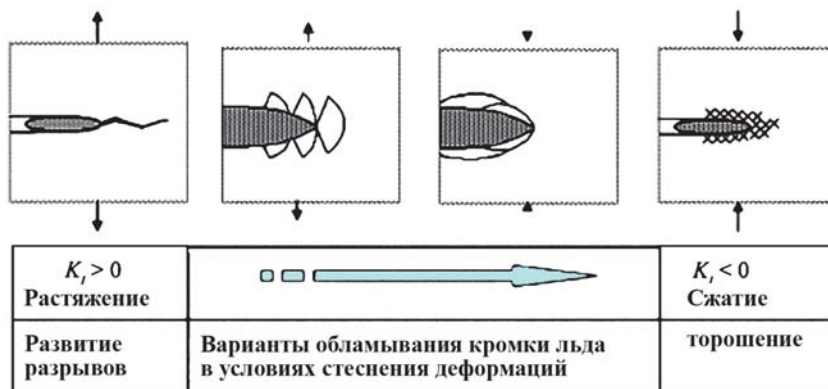


Рис. 11. Взаимосвязь формы разрушения ледоколом ледяного покрова и коэффициента интенсивности напряжений  $K_i$  в масштабе длины открытой части канала

коэффициента интенсивности напряжений. Кроме  $K_i$ , характеризующего симметричный нормальный отрыв или сжатие, могут существовать величины  $K_{II}$  и  $K_{III}$ , отвечающие поперечному (вдоль линии разреза) или продольному (поперек плоскости ледяного покрова либо вдоль фронта разреза) сдвигу соответственно [15; 17]. Присутствие сдвига приводит к появлению неравнозначности напряжений и, следовательно, условий разрушения по правому и левому бортам ледокола в плоскости ледяного покрова при  $K_{II} \uparrow 0$  или к развитию несимметричных деформаций в верхних и нижних частях пластины льда при условии  $K_{III} \uparrow 0$ . Это может вызвать, в частности, изменение траектории трещин и формы разрушения в целом и приводить к появлению моментов рыскания и крена ледокола.

Для малой окрестности вершины разреза справедливы асимптотические выражения [15]:

$$\sigma_{r,\theta} = \frac{K_i}{\sqrt{r}} f(\theta), \quad i = I, II, III, \quad (4)$$

где  $r, \theta$  — малое расстояние и полярный угол, отсчитываемые соответственно от вершины разреза и направления, отвечающего продолжению разреза.

Разбиение задачи на внешнюю и внутреннюю дает основу для анализа форм разрушения льда при работе ледокола и построения их классификации в зависимости от напряженного состояния ледяного покрова (сжатия льдов).

**Принципы классификации основных форм разрушения ледяного покрова ледоколами.** Поскольку концентрация напряжений сжатия в зоне работы ледокола активно влияет на локальные условия разрушения льда, затрудняя развитие в нем трещин при обламывании кромки льда и препятствуя выносу блоков льда из очага разрушения, параметр, отвечающий за интенсивность этого влияния, служит регулятором формы разрушения. Механизм разрушения ледяного покрова ледоколом обладает

автономностью: на физическую картину стационарного процесса в вершине канала внешние нагрузки оказывают влияние только через посредство коэффициентов интенсивности напряжений. Учитывая эти обстоятельства, а также автономность процессов разрушения ледяного покрова при работе ледокола в установившемся режиме, можно полагать, что условия и формы разрушения во внутренней задаче, зависящие от напряженного состояния вблизи вершины канала, определяются для ледокола фиксированного типа уровнем коэффициентов интенсивности напряжений во внешней задаче.

Среди реально наблюдаемых схем разрушения ледяного покрова [38; 39; 41; 42 и др.] можно выделить несколько основных форм разрушения при установившемся движении ледокола в ненарушенном ледяном покрове, располагая их по мере возрастания сжатия льдов и соответствующего изменения коэффициента интенсивности напряжений (рис. 11).

Для определения величины эффективного коэффициента интенсивности напряжений в конкретных конфигурациях канала и условий нагружения оказываются полезными некоторые известные решения соответствующих задач механики разрушения [43; 44]. Пусть, например, ледокол движется поперек направления одноосного сжатия сплошных льдов. В этом случае задачу о системе ледокол — канал можно представить в виде совокупности двух задач механики разрушения: задачи об упругой плоскости, расклиниваемой клином постоянной ширины при плоском напряженном состоянии, и о трещине нормального разрыва, длина которой близка к длине канала, находящейся под действием однородного сжатия на бесконечности (рис. 12).

Условие плавного смыкания канала на удаленном от ледокола конце  $K_i = 0$  позволяет независимо оценивать эффективную длину канала  $\ell$  и коэффициент интенсивности напряжений в окрестности ледокола.

Из [43] для описанного варианта имеем:

$$K_{II} = K_{III} = 0,$$

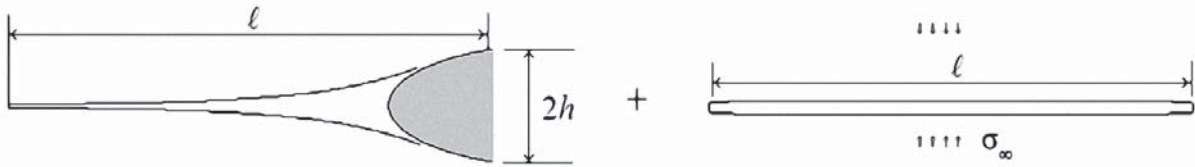


Рис. 12. Задача о движении ледокола поперек направления сжатия льдов

$$K_{I(1)} = \frac{\sqrt{2}Eh}{\sqrt{\pi\ell}} \quad (\text{для клина}), \quad (5)$$

где  $E$  — модуль упругости ледяного покрова,

$$K_{I(2)} = \sigma_\infty \sqrt{\pi \frac{\ell}{2}} \quad (\text{для трещины}). \quad (6)$$

Условие плавного смыкания канала:  $K_{I(1)} = K_{I(2)}$ .  
Отсюда длина канала

$$\ell = \frac{2Eh}{\pi\sigma_\infty}. \quad (7)$$

Эффективный коэффициент интенсивности напряжений в области ледокола совпадает с  $K_{I(2)}$ :

$$K_{\text{эф}} = K_{I(2)} = \sigma_\infty \sqrt{\pi \frac{\ell}{2}} = \sqrt{\sigma_\infty E h}. \quad (8)$$

Соотношения (5) и (6) позволяют по длине канала и уровню сжатия оценить эффективные деформационные характеристики ледяного покрова, в частности

$$E_{(\text{эф})} = \frac{\pi\sigma_\infty \ell}{2h}. \quad (9)$$

Для приведенного выше примера длины канала около 1,5—2,5 км при сжатии льдов в 1 балл (напряжение сжатия порядка 5 кПа) и 500—700 м при сжатии 2 балла (5 кПа) эффективный модуль упругости регионального ледяного покрова  $E_{(\text{эф})} \approx 2$  МПа, что значительно меньше значений, полученных при локальных измерениях модуля упругости [29].

**Управление напряженным состоянием ледяного покрова.** Практика строительства инженерных объектов на шельфе арктических морей сталкивается с необходимостью поиска методов управления окружающей средой и, в частности, управления движениями и структурой ледяного покрова в локальном и региональном масштабах для повышения безопасности и решения сопряженных проблем в смежных разделах наук о Земле. В связи с этим создание и развитие методов активного воздействия на механику региональных и локальных движений ледяного покрова становится важной задачей. В основе ее решения находятся изучение

природы рассматриваемых процессов, их классификация, разработка теоретических и расчетных моделей, создание методик и приемов воздействия на эти процессы, а также тактики мониторинга и оперативного вмешательства в ледовую обстановку, разработка системы оценки параметров необходимого воздействия в зависимости от соотношения масштабов объекта, контролируемого процесса и граничных условий.

К приемам управления напряженным состоянием ледяного покрова относятся, например, действия ледокола по освобождению судна или сооружения от ледового сжатия. Принцип активного управления напряженным состоянием ледяного покрова в этом случае опирается на распределение напряжений в окрестности канала как трещиноподобного нарушения в ледяном покрове при сжатии, которое может быть распространено на защищаемый объект. Область вокруг вершины канала и ледокола концентрирует сжатие, а в окрестности центральной части канала до его смыкания ледяной покров разгружается. Если ледокол прокладывает канал к объекту поперек направления сжатия, область концентрации сжимающих напряжений в окрестности вершины канала, двигаясь вместе с ледоколом, усиливает сжатие объекта. Однако если предварительно ледокол произвел циркуляцию в дальней окрестности объекта, сжатие уменьшается. Эта ситуация проиллюстрирована на рис. 13.

Другие варианты тактики работы ледокола и создания искусственных нарушений в ледяном покрове при необходимости разгрузить некоторую область приведены в [4].

### Заключение

Морской лед представляет собой сложную структурированную среду, механические свойства и прочность которой определяются механизмами разрушения с участием элементов структуры различного масштаба. Для изучения закономерностей процессов разрушения и их сценариев может быть успешно применен аппарат механики разрушения материалов и конструкций. Рассматриваемые явления, такие как образование трещиноподобных неоднородностей естественного и искусственного происхождения, позволяют расширить область применения механики разрушения.

На примере оценки прочности льда и ледяного покрова при статическом сжатии в горизонтальном



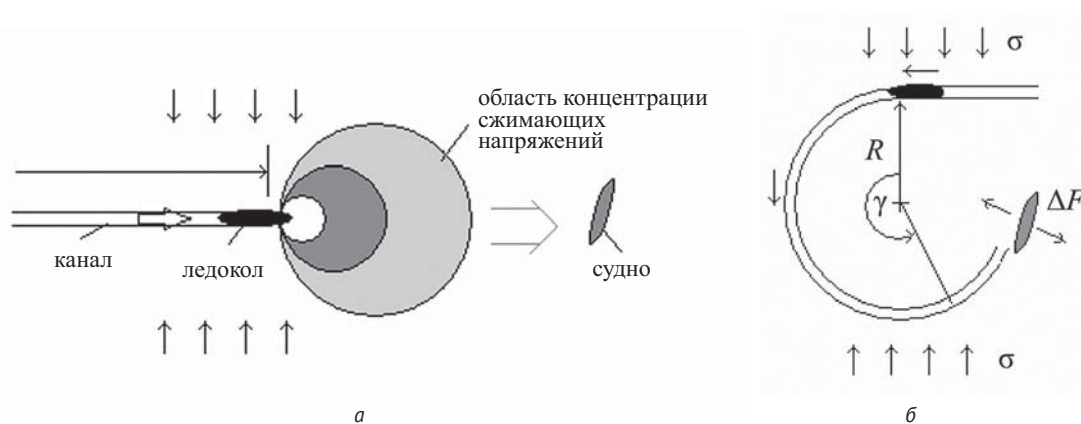


Рис. 13. Действия ледокола при подходе к судну или ледостойкой платформе в сжатых льдах: *а* – опасный вариант сближения, *б* – рекомендуемая тактика. При циркуляции на угол  $\gamma \geq 90^\circ$  сжатие в районе объекта прекращается.  $\Delta F$  – направление сил, компенсирующих сжатие

направлении (поперек осей капилляров) в рамках упруго-хрупкой модели показана возможность реализации в нем нескольких сценариев развития разрушения, в основе которых лежит процесс объединения микротрещин, растущих от соседних капилляров. Предсказанная на основе модели зависимость прочности льда от пористости с учетом заполнения пор рассолом согласуется с экспериментальными данными.

Предложен способ оценки осредненной прочности ледяного покрова по отношению к продольному сжатию с учетом частичной потери несущей способности слоев льда в процессе деформирования. Показана масштабная изменчивость механизма разрушения льда при локальном нагружении. Рассмотрены закономерности развития трещиноподобных структур разрушения при сжатии тонкого ледяного покрова в условиях развития наслоений и торосов, введена характеристика торосостойкости ледяного покрова при сжатии по аналогии с трещиностойкостью при распространении трещин нормального разрыва.

Канал, прокладываемый ледоколом в сплошном ледяном покрове, также может быть представлен как искусственный трещиноподобный дефект, что позволяет оценивать напряженно-деформированное состояние ледяного покрова в районе действия ледокола при сжатии льдов одним параметром — коэффициентом интенсивности напряжений в вершине канала. Это, в свою очередь, дает принципиальную возможность классифицировать формы разрушения льда при работе ледокола, а также выстраивать тактику движения ледокола с целью снижения уровня сжатия в избранном районе, например для обеспечения безопасности судна или сооружения.

Анализ задач механики разрушения предполагает также построение моделей крупномасштабных движений ледяного покрова, в том числе при

взаимодействии с протяженной преградой, разработку принципов физического и математического моделирования разрушения льда при взаимодействии с судами и сооружениями, а также возможных последствий разрушения льда в обменных процессах и связанных с этим климатических изменений в арктическом регионе.

На рассмотренных примерах упруго-хрупкого разрушения ледяного покрова, объединенных в таблицу, можно видеть разнообразие сценариев разрушения морского льда, что необходимо иметь в виду при анализе взаимодействия ледяного покрова с судами и сооружениями. Результаты работы могут служить основой при разработке и анализе эффективности систем обеспечения безопасности ледостойких сооружений и специальных операций в Арктике.

Работа выполнена при поддержке Программы фундаментальных исследований И.ЗП Президиума РАН.

#### Литература

1. Тышко К. П., Черепанов Н. В., Федотов В. И. Кристаллическое строение морского ледяного покрова. — СПб.: Гидрометеиздат, 2000. — 66 с.
2. Гольдштейн Р. В., Ладыгин В. М., Осипенко Н. М. Модель разрушения слабопористого материала при сжатии и растяжении // Физ.-техн. проблемы разработки полезных ископаемых. — 1974. — 1. — С. 3—16.
3. Гольдштейн Р. В. Разрушение при сжатии // Успехи механики. — 2003. — Т. 2, 2. — С. 3—20.
4. Goldstein R. V., Osipenko N. M. Some questions on ice and ice cover fracture in compression // Ice-structure interaction: IUTAM-IAHR Symp. St. John's, New Foundland, Canada. — Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 1991. — P. 251—266.
5. Lajtai E. Z, Lajtai V. N. The collapse of cavities // Intern. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr. — 1975. — 12. — P. 81—86.

6. Sammis C. G., Ashby M. F. The failure of brittle porous solids under compressive stress states // *Acta Metall.* — 1986. — 34. — P. 511—526.
7. Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Некоторые вопросы механики прочности морского льда // *Физ. мезомеханика.* — 2014. — Т. 37, 12. — С. 1292—1305.
8. Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Структуры в процессах разрушения // *Изв. РАН. МТТ.* — 1999. — 5. — С. 49—71.
9. Timko G. W., Frederking R. M. W. Compressive strength of ice sheets // *Cold Reg. Sci. and Techn.* — 1990. — 17. — P. 227—240.
10. Schwarz J., Weeks W. F. Engineering properties of sea ice // *J. Glaciol.* — 1977. — 19, 81. — P. 499—531.
11. Черепанов Н. В. Классификация льдов природных водоемов // *Тр. ААНИИ.* — 1976. — Т. 331. — С. 77—99.
12. Schulson E. M. Brittle failure of ice // *Eng. Fract. Mech.* — 2001. — 68. — P. 1839—1887.
13. Renshaw C. E., Schulson E. M. Universal behavior in compressive failure of brittle materials // *Nature.* — 2001. — 412, 30. — P. 897—900.
14. Schulson E. M. Compressive shear faults within arctic sea ice: Fracture on scales large and small // *J. Geoph. Res.* — 2004. — 109, C07016. — P.23.
15. Хеллан К. Введение в механику разрушения. — М.: Мир, 1988. — 364 с.
16. Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Трещиностойкость и разрушение ледяного покрова ледоколами // *Тр. ААНИИ.* — 1986. — Т. 391. — С. 137—156.
17. Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Механика разрушения и некоторые вопросы разрушения льда // *Механика и физика льда.* — М.: Наука, 1983. — С. 65—94.
18. Dempsey J. P., Adamson R. M., Mulmule S. V. Scale effect on the in-situ tensile strength and fracture of ice. — Pt. II: First-year sea ice at Resolute, N.W.T // *Intern. J. Fract.* — 1999. — 95. — P. 347—366.
19. Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Вопросы механики разрушения льда при анализе ледовых нагрузок // *Вести газовой науки: Современные подходы и перспективные технологии в проектах освоения нефтегазовых месторождений российского шельфа: Вып. 3 (14).* — М.: Газпром ВНИИГАЗ, 2013. — С. 104—112.
20. Sodhi D. S. Deflection analysis of radially cracked floating ice sheets // *Proc. Int. Conf. on Offshore Mechanics and Arctic Engineering.* Florence, Italy, June 16—20, 1996. — 4. — P. 97—101.
21. Gold L. W. Use of ice covers for transportation // *Canadian Geotech. J.* — 1971. — 8. — P. 170.
22. Sodhi D. S. Vertical penetration of floating ice sheets // *Intern. J. Solids Struct.* — 1998. — 35 (31—32). — P. 4275—4294.
23. Sodhi D. S. Breakthrough loads of floating ice sheets // *J. Cold Reg. Eng.* — 1995. — 9. — P. 4—22.
24. Bazant Z. P., Kim J. J. H. Size effect in penetration of sea ice plate with part-through cracks. — II: Results // *J. Eng. Mech.* — 1998. — 124 (6). — P. 1316—1324.
25. Dempsey J. P., Slepyan L. I., Shekhtman I. I. Radial cracking with closure // *Intern. J. Fract.* — 1995. — 73. — P. 233—261.
26. Slepyan L. I. Modeling of fracture of sheet ice // *Mech. Solids.* — 1990. — 25 (2). — P. 151—161.
27. Goldstein R. V., Osipenko N. M. Fracture mechanics in modeling of icebreaking capability of ships // *J. Cold Reg. Eng.* — 1993. — 7 (2). — P. 33—43.
28. Frankenstein G. E. Load test data for lake ice sheets: CRREL Technical Report 89. — [S. I.], 1963. — 29 p.
29. Gold I. W. The process of failure of columnar-grained ice // *Phil. Mag.* — 1972. — 26, 2. — P. 311—328.
30. Богородский В. В., Гаврило В. П. Лед. — Л.: Гидрометеиздат, 1980. — 384 с.
31. Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Разрушение ледяного покрова в окрестности преграды: Модели процесса разрушения. — М., 2000. — 40 с. — (Препринт ИПМех РАН).
32. Goldstein R., Osipenko N., Lepparanta M. On the formation of large scale structural features in scaling laws in ice mechanics and ice dynamics // *Proc. IUTAM Symp. Fairbanks, Alaska USA, 13—16 June 2000.* — [S. I.]: Kluwer Academic Publ., 2001. — P. 323—324.
33. Гольдштейн Р. В., Епифанов В. П., Осипенко Н. М. Масштабный эффект при разрушении речного льда в условиях индентирования // *Актуальные проблемы механики.* — М.: Наука, 2009. — С. 35—55.
34. Goldstein R. V., Osipenko N. M. An influence of the indenter size on fracture mechanism of ice at indentation // *Proc. 20<sup>th</sup> Int. Conference (POAC 2009) Lulea, Sweden.* — 2009. — 2. — P. 1189—1202.
35. Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. О локализованном хрупком разрушении тонких тел с трещиноподобными дефектами при сжатии со стеснением // *Изв. АН СССР. МТТ.* — 1987. — 5. — С. 158—167.
36. Гольдштейн Р. В., Осипенко Н. М. Крупномасштабные структуры в ледяном покрове. Системы разрывов. — М., 1998. — 36 с. — (Препринт ИПМ РАН).
37. Goldstein R., Osipenko N., Lepparanta M. Classification of large-scale sea ice structures based on remote sensing imagery // *Geoph.* — 2000. — 36. — P. 95—109.
38. Каштелян В. И., Позняк И. Н., Рывлин А. Я. Сопротивление льда движению судна. — Л.: Судостроение, 1968. — 240 с.
39. Сазонов К. Е. Теоретические основы плавания судов во льдах / ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова. — СПб., 2010. — 247 с.
40. Доронин Ю. П., Хейсин Д. Е. Морской лед. — Л.: Гидрометеиздат, 1975. — 318 с.
41. Хейсин Д. Е., Рывлин А. Я. Испытания судов во льдах. — Л.: Гидрометеиздат, 1980. — 207 с.
42. Хейсин Д. Е. Динамика ледяного покрова. — Л.: Гидрометеиздат, 1967. — 215 с.
43. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. — М.: Наука, 1974. — 640 с.
44. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений. — Т. 1 / Под ред. Ю. Мураками. — М.: Мир, 1990. — 448 с.